Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Sabemos que la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden está dada por $y = c_1y_1 + c_2y_2$ por lo que se tiene dos soluciones no triviales, en caso de tener sólo una solución diferente a la trivial, se procede a encontrar una nueva solución a partir de ésta.

Método de reducción de orden.

Se sabe que si f es una solución no trivial de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, entonces se satisface que $f'' + p(x)f' + q(x)f = 0$

Se desea encontrar una segunda solución a partir de f, la cual se propone como $y_2(x) = u(x)f(x)$, en donde se desconoce $u(x)$.

A fin de comprobar que $y_2(x) = u(x)f(x)$ es solución de la ecuación diferencial se obtiene la primera y segunda derivada

Entonces la segunda solución esta dada por:

$$y_2(x) = u(x)f(x) = f(x)\int \frac{e^{-\int p\,dx}}{f^2}\,dx$$

Ejemplo S7.1: Considere la ecuación diferencial

$$(\mathrm{x}^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0 \qquad y_1 = x$$

Y resuélvala mediante el método visto

$$y_2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)x = x^2 - 1$$

$$\therefore\ y = C_1 x + C_2(x^2 - 1)$$

Ejercicios S7.1: Usando la fórmula $y_2 = f(x)\int \frac{e^{-\int p\,dx}}{f^2}dx$ resuelva

Ecuación diferencial	Resultado
1. $y'' - 2y' + y = 0$ si $f(x) = e^x$	
2. $x^2y'' - 5xy' + 8y = 0$ sí $f(x) = x^2$	$y = C_1x^2 + C_2x^4$
3. $y'' - 10y' + 25y = 0$ sí $f(x) = xe^{5x}$	$y = C_1e^{5x} + C_2x\,e^{5x}$
4. $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$ sí $f(x) = e^x$	$y = C_1e^x + C_2x^2e^x$
5. $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$ sí $f(x) = x$	$y = C_1x + C_2xe^x$

Reducción de Orden. Sin conocer previamente una solución

A partir de una ecuación diferencial $F(x, y, y', y'') = 0$ consideremos dos casos para resolver este tipo de ecuaciones:

CASO 1) Ausencia de la variable dependiente

Si la variable dependiente y no aparece explícitamente en la ecuación diferencial, entonces $f(x, y', y'') = 0$, se puede escribir introduciendo una nueva variable dependiente p tal que $y' = p$ y $y'' = \frac{dp}{dx}$ entonces la ecuación diferencial queda como $f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$.

Ejemplo S7.2: Considere la ecuación diferencial

$$xy'' - y' = 3x^2$$

$$y = x^3 + c_1\frac{x^2}{2} + c_2$$

CASO 2). Ausencia de la variable independiente

Si la variable independiente x no está presente explícitamente, la ecuación diferencial de segundo orden $f(y, y', y'') = 0$ se puede escribir introduciendo la variable dependiente p del mismo modo que en el caso anterior $y' = p$ y en este caso $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$ Por lo tanto la ecuación diferencial queda expresada como $f\left(y,\ p,\ p\frac{dp}{dy}\right) = 0$. A partir de este cambio se puede proceder como el caso anterior.

Ejemplo S7.3: Considere la ecuación diferencial

$$y'' + k^2 y = 0$$

$$y = A\,\text{sen}(\pm kx + b)$$

$$y = C_1\,\text{sen}\,Kx + C_2 \cos kx$$

Ejercicios S7.2 Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales mediante reducción de orden

Ecuación diferencial	Solución
1. $(y')^2 = x^2 y''$	$y = \frac{x}{c_1} - \frac{1}{c_1}\ln(1 + c_1 x) + c_2$
2. $y'' = y' e^y \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$	$y = -\ln(-x + 1)$
3. $y\, y'' + (y')^2 = 0$	$\ln y = c_1 x + c_2$
4. $x\, y'' = y' + (y')^3$	$x^2 + (y - c_2)^2 = (c_1)^2$
5. $x^2 y'' = 2xy' + (y')^2$	$y = -\frac{1}{2}x^2 - c_1 x - c_1^2 \ln(c_1 - x) + c_2$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Orden Superior

Una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n, con $n > 1$, (es decir con derivadas de orden superior) en la variable dependiente y y la variable independiente x, con $a_0(x) \neq 0$, es aquella que se puede expresar de la forma:

$$a_0(x)y^n + a_1(x)\, y^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x)$$

Se supondrá que toda $a_k(x)$, así como $F(x)$ son funciones continuas reales en un intervalo real $a \leq x \leq b$. Los coeficientes $a_k(x)$ podrán ser variables o constantes. Si $F(x) = 0$ la ecuación diferencial de orden superior se considera homogénea, sino fuese el caso será no homogénea.

Se distinguen 4 tipos diferentes de ecuaciones diferenciales:

1) Si $a_k(x)$ son constantes y $a_0(x) \neq 0$ y $F(x) \neq 0$ entonces es ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes no homogénea. Por ejemplo:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^2x}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} - 4y = \operatorname{sen} x$$

2) Si $a_k(x)$ son constantes y $a_0(x) \neq 0$ y $F(x) = 0$ entonces es ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes homogénea. Por ejemplo:

$$8\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^3y}{dx^3} - 14\frac{d^2x}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 5y = 0$$

3) Si $a_k(x)$ son variables y $a_0(x) \neq 0$ y $F(x) \neq 0$ entonces es ecuación diferencial lineal con coeficientes variables no homogénea. Por ejemplo:
$$(x^3-1)\frac{d^4y}{dx^4}-(x-1)\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2x}{dx^2}+x^5\frac{dy}{dx}+x^3y=x^2+\operatorname{sen}x$$
4) Si $a_k(x)$ son variables y $a_0(x) \neq 0$ y $F(x) = 0$ entonces es ecuación diferencial lineal con coeficientes variables homogénea. Por ejemplo:
$$(x-2)\frac{d^4y}{dx^4}-(\cos x+1)\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2x}{dx^2}+x^5\frac{dy}{dx}+(1-x^2)^3y\ =0$$

Operadores Diferenciales y su Álgebra

Definición. Se llama operador diferencial lineal D, al operador que cumple las siguientes propiedades:

- $D(cy) = c\,D(y)$ para todo número arbitrario c.
- $D(y_1+y_2) = D(y_1)+D(y_2)$

Si se asume que $D=\frac{d}{dx}$, entonces se pueden representar las derivadas de una función por potencias de D, como:

$$Dy=\frac{dy}{dx}\ ,\qquad D^2y=\frac{d^2y}{dx^2}\ ,\qquad D^3y=\frac{d^3y}{dx^3},\dots,D^ny=\frac{d^ny}{dx^n}$$

Por lo tanto la ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden se puede expresar como:

$$a_0(x)D^ny+a_1(x)\,D^{n-1}y+\cdots+a_{n-1}(x)Dy+a_n(x)y=0$$

o también $\quad P(D)y=[a_0(x)D^n+a_1(x)\,D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(x)D+a_n(x)]\,y=0$
donde $P(D)$ se conoce como factor diferencial de orden n, y D es un operador diferencial.

Leyes Fundamentales para los Factores Diferenciales

Se dice que dos funciones diferenciales $P_1(D)$ y $P_2(D)$ son iguales si y solamente si, se produce el mismo resultado cuando cada uno de ellos actúa sobre una función (aceptando que la función y puede derivarse tantas veces como sea necesario, de acuerdo al orden de la derivada).

De esta manera sí:

$$P_1(D) = P_2(D) \quad entonces \quad P_1(D)y = P_2(D)y$$

Por otra parte, considere $P_1(D), P_2(D)$ y $P_3(D)$ cualesquiera factores diferenciales de la forma:

$$P_1(D) = a_0D^n + a_1\, D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n$$

$$P_2(D) = b_0D^n + b_1\, D^{n-1} + \cdots + b_{n-1}D + b_n$$

$$P_3(D) = c_0D^k + c_1\, D^{k-1} + \cdots + c_{k-1}D + c_k$$

Entonces se cumple:

Ley conmutativa de la adición.	$P_1(D) + P_2(D) = P_2(D) + P_1(D)$
Ley asociativa de la adición	$(P_1(D) + P_2(D)) + P_3(D) = P_1(D) + (P_2(D) + P_3(D))$
Ley asociativa de la multiplicación	$(P_1(D).P_2(D)).P_3(D) = P_1(D).(P_2(D).P_3(D))$
Ley distributiva de la multiplicación respecto a la adición	$P_1(D).(P_2(D) + P_3(D)) = P_1(D)P_2(D) + P_1(D)P_3(D)$
Ley conmutativa de la multiplicación	$P_1(D)P_2(D) = P_2(D)P_1(D)$

Si m y n son dos enteros positivos y D es un operador diferencial lineal, entonces:

$$D^mD^n = D^{m+n}$$

Observaciones:

1) Es de gran utilidad que los factores diferenciales satisfagan las leyes de algebra sobre polinomios.
2) En atención a las propiedades se puede establecer que:

$$P(D)y = (a_0D^n + a_1\, D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n) = 0$$

Es equivalente a $\quad = (D - r_1)(D - r_2)(D - r_3) \ldots (D - r_n)\, y = 0$

Donde $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ denotan las raíces de $P(D)$, es decir, como resultado del Teorema Fundamental del Algebra es posible factorizar el polinomio en factores de primer grado y deducir las n raíces r_i reales o complejas.

3) Con base en la ley de los exponentes, será posible aplicar de forma iterada la derivada n-ésima sobre la función f, haciendo:

$$\begin{aligned} D^n f(x) &= D^{n-1}.Df(x) \\ &= D^{n-2}.D.Df(x) \\ &= D^{n-3}.D.D.Df(x) \\ &\vdots \\ &= \underbrace{D.D.D\ldots D.}_{\text{n veces}}Df(x) \end{aligned}$$

Ejemplo S7.4. Exprese $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ como un factor diferencial aplicado a la función y tal que $P(D)y = 0$.

Ejercicios S7.3. Ejecute el factor diferencial de acuerdo a las indicaciones.

1. Exprese $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 4y = 0$ como un producto $(D - r_1)(D - r_2)(D - r_3)\ldots(D - r_n)y = 0$
2. Exprese $(D - 2)(3D^2 - 2D + 1)y = 0$ a través de una factor diferencial en forma polinomial de orden tres, tal que $P(D)y = 0$.
3. Exprese la derivada de orden dos como un producto de factores diferenciales de orden uno aplicando la función y.
4. Calcule $(D^3 + 2D^2)(x^4 + 2x)$
5. Dado los operadores $P_1(D) = D + 1, P_2(D) = D^2$ y la función $y = x^3$ pruebe que se cumple que $P_1(D)P_2(D)y = P_2(D)P_1(D)y$.
6. Dado los operadores $P_1(D) = D^2 + 1, P_2(D) = x^2D$ y la función $y = x^3$ pruebe que no se cumple que $P_1(D)P_2(D)y = P_2(D)P_1(D)y$.

Definición. Si para toda x en el intervalo $a < x < b$, al aplicar el operador diferencial $A = P(D)$ a una función f sucede que $P(D)(f(x)) = 0$ a este operador A se le denomina ***Operador Diferencial Anulador***.

Ejemplo S7.5. Compruebe que $P_1(D) = D^2 + 9$ y $P_2(D) = D^3 + 9D$ anulan a la función $f(x) = cos\ 3x$.

Con lo que se concluye que el **operador anulador de una función no es único.**

Ejercicios S7.5. Encuentre el operador anulador para las siguientes funciones

1. Compruebe que $P_1(D) = D^3 - 27$ anula a la función $f(x) = e^{3x}$
2. Compruebe que $P_1(D) = D^3 + 9D$ anulan a la función $f(x) = sin\ 3x$